Reformulación de la correspondencia entre gravedad 3-dimensional y teoría de Chern-Simons en el fibrado de bases afín

S. Capriotti[1]

[1]Depto. de Matemática, Universidad Nacional del Sur y CONICET

Estructura de la comunicación

Introducción a la teoría de campos de Chern-Simons

Correspondencia de Witten mediante conexiones de Cartan

Teoría de Chern-Simons y extensión de conexiones

Dónde estamos...

Introducción a la teoría de campos de Chern-Simons

Correspondencia de Witten mediante conexiones de Cartan

Teoría de Chern-Simons y extensión de conexiones

Teoría de campos de Chern-Simons

- Sobre $P = M \times SU(2)$ se define la forma de Chern-Simons

$$\beta = \mathrm{Tr}(F \wedge A) - \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(A \wedge \left[A \overset{\wedge}{,} A\right]\right).$$

- **¡Cuidado!** La forma de Chern-Simons está bien definida como forma sobre P. Si $U \subset M$ satisface

$$H^{2k}(U) = 0,$$

entonces existe $\beta_U \in \Omega^{2k-1}(U)$ tal que $\pi^* \beta_U = \beta$.

- Teoría de CS (Freed 1995; Tejero Prieto 2004)
  - Campos $\equiv$ conexiones principales sobre $\pi : P \to M$.
  - Usamos la representación local $A_U \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ + $s_U : U \to P$ sección local de P.
  - Bajo estas condiciones, la acción resulta

$$S = \int_U \beta_U$$

donde β_U es la forma de Chern-Simons para el dato (A_U, s_U).

Teoría de campos de Chern-Simons

- Sobre $P = M \times SU(2)$ se define la forma de Chern-Simons

$$\beta = \operatorname{Tr}(F \wedge A) - \frac{1}{6}\operatorname{Tr}\left(A \wedge \left[A \overset{\wedge}{,} A\right]\right).$$

- **¡Cuidado!** La forma de Chern-Simons está bien definida como forma sobre P. Si $U \subset M$ satisface

$$H^{2k}(U) = 0,$$

entonces existe $\beta_U \in \Omega^{2k-1}(U)$ tal que $\pi^* \beta_U = \beta$.

- Teoría de CS (Freed 1995; Tejero Prieto 2004)
  - Campos $\equiv$ conexiones principales sobre $\pi : P \to M$.
  - Usamos la representación local $A_U \in \Omega^1(U, \mathfrak{g}) + s_U : U \to P$ sección local de P.
  - Bajo estas condiciones, la acción resulta

$$S = \int_U \beta_U$$

donde β_U es la forma de Chern-Simons para el dato (A_U, s_U)

Teoría de campos de Chern-Simons

- Sobre $P = M \times SU(2)$ se define la forma de Chern-Simons

$$\beta = \mathrm{Tr}(F \wedge A) - \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(A \wedge \left[A \overset{\wedge}{,} A\right]\right).$$

- **¡Cuidado!** La forma de Chern-Simons está bien definida como forma sobre P. Si $U \subset M$ satisface

$$H^{2k}(U) = 0,$$

entonces existe $\beta_U \in \Omega^{2k-1}(U)$ tal que $\pi^* \beta_U = \beta$.

- Teoría de CS (Freed 1995; Tejero Prieto 2004)
  - Campos $\equiv$ conexiones principales sobre $\pi : P \to M$.
  - Usamos la representación local $A_U \in \Omega^1(U, \mathfrak{g}) + s_U : U \to P$ sección local de P.
  - Bajo estas condiciones, la acción resulta

$$S = \int_U \beta_U$$

donde β_U es la forma de Chern-Simons para el dato (A_U, s_U).

Teoría de campos de Chern-Simons

- Sobre $P = M \times SU(2)$ se define la forma de Chern-Simons

$$\beta = \mathrm{Tr}\left(F \wedge A\right) - \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(A \wedge \left[A \overset{\wedge}{,} A\right]\right).$$

- **¡Cuidado!** La forma de Chern-Simons está bien definida como forma sobre P. Si $U \subset M$ satisface

$$H^{2k}(U) = 0,$$

entonces existe $\beta_U \in \Omega^{2k-1}(U)$ tal que $\pi^* \beta_U = \beta$.

- Teoría de CS (Freed 1995; Tejero Prieto 2004)
    - Campos $\equiv$ conexiones principales sobre $\pi : P \to M$.
    - Usamos la representación local $A_U \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ + $s_U : U \to P$ sección local de P.
    - Bajo estas condiciones, la acción resulta

$$S = \int_U \beta_U$$

donde β_U es la forma de Chern-Simons para el dato (A_U, s_U).

Teoría de campos de Chern-Simons

- Sobre $P = M \times SU(2)$ se define la forma de Chern-Simons

$$\beta = \mathrm{Tr}(F \wedge A) - \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left(A \wedge \left[A \overset{\wedge}{,} A\right]\right).$$

- **¡Cuidado!** La forma de Chern-Simons está bien definida como forma sobre P. Si $U \subset M$ satisface

$$H^{2k}(U) = 0,$$

  entonces existe $\beta_U \in \Omega^{2k-1}(U)$ tal que $\pi^* \beta_U = \beta$.

- Teoría de CS (Freed 1995; Tejero Prieto 2004)
  - Campos $\equiv$ conexiones principales sobre $\pi : P \to M$.
  - Usamos la representación local $A_U \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ + $s_U : U \to P$ sección local de P.
  - Bajo estas condiciones, la acción resulta

$$S = \int_U \beta_U$$

  donde β_U es la forma de Chern-Simons para el dato (A_U, s_U).

Teoría de campos de CS y gravedad

- De aquí en más $\dim M = 3$.
- La ación para la gravedad con bases es

$$I_{RG} = \int_M \varepsilon_{abc}\varepsilon^{ijk}\left[e_i^a\left(\frac{\partial\omega_k^{bc}}{\partial x^j} - \frac{\partial\omega_j^{bc}}{\partial x^k} + \left[\omega_j,\omega_k\right]^{bc}\right)\right] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

- La correspondencia de Witten (Witten 1988) se define mediante

$$\left(x^i, e_i^a, \omega_k^{ab}\right) \mapsto A_i := e_i^a P_a + \frac{1}{2}\delta^{ad}\varepsilon_{dbc}\omega_i^{bc} J_a.$$

- Si $G = ISO(2,1) = \mathbb{R}^3 \ltimes SO(2,1)$, resulta

$$I_{CS} = \int_M \mathrm{Tr}\left(A\wedge F - \frac{1}{6}A\wedge\left[A \overset{\wedge}{,} A\right]\right) = I_{RG}.$$

Teoría de campos de CS y gravedad

- De aquí en más $\dim M = 3$.
- La ación para la gravedad con bases es

$$I_{RG} = \int_M \varepsilon_{abc}\varepsilon^{ijk}\left[e_i^a\left(\frac{\partial \omega_k^{bc}}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j^{bc}}{\partial x^k} + \left[\omega_j, \omega_k\right]^{bc}\right)\right] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

- La correspondencia de Witten (Witten 1988) se define mediante

$$\left(x^i, e_i^a, \omega_k^{ab}\right) \mapsto A_i := e_i^a P_a + \frac{1}{2}\delta^{ad}\varepsilon_{dbc}\omega_i^{bc} J_a.$$

- Si $G = ISO(2,1) = \mathbb{R}^3 \ltimes SO(2,1)$, resulta

$$I_{CS} = \int_M \operatorname{Tr}\left(A \wedge F - \frac{1}{6} A \wedge [A \stackrel{\wedge}{,} A]\right) = I_{RG}.$$

Teoría de campos de CS y gravedad

- De aquí en más $\dim M = 3$.
- La ación para la gravedad con bases es

$$I_{RG} = \int_M \varepsilon_{abc}\varepsilon^{ijk}\left[e_i^a\left(\frac{\partial\omega_k^{bc}}{\partial x^j} - \frac{\partial\omega_j^{bc}}{\partial x^k} + \left[\omega_j,\omega_k\right]^{bc}\right)\right] dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3.$$

- La correspondencia de Witten (Witten 1988) se define mediante

$$\left(x^i, e_i^a, \omega_k^{ab}\right) \mapsto A_i := e_i^a P_a + \frac{1}{2}\delta^{ad}\varepsilon_{dbc}\omega_i^{bc} J_a.$$

- Si $G = ISO(2,1) = \mathbb{R}^3 \ltimes SO(2,1)$, resulta

$$I_{CS} = \int_M \mathrm{Tr}\left(A\wedge F - \frac{1}{6}A\wedge\left[A \overset{\wedge}{,} A\right]\right) = I_{RG}.$$

Teoría de campos de CS y gravedad

- De aquí en más $\dim M = 3$.
- La ación para la gravedad con bases es

$$I_{RG} = \int_M \varepsilon_{abc}\varepsilon^{ijk}\left[e_i^a\left(\frac{\partial\omega_k^{bc}}{\partial x^j} - \frac{\partial\omega_j^{bc}}{\partial x^k} + \left[\omega_j,\omega_k\right]^{bc}\right)\right]dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3.$$

- La correspondencia de Witten (Witten 1988) se define mediante

$$\left(x^i, e_i^a, \omega_k^{ab}\right)\mapsto A_i := e_i^a P_a + \frac{1}{2}\delta^{ad}\varepsilon_{dbc}\omega_i^{bc}J_a.$$

- Si $G = ISO(2,1) = \mathbb{R}^3 \ltimes SO(2,1)$, resulta

$$I_{CS} = \int_M \mathrm{Tr}\left(A\wedge F - \frac{1}{6}A\wedge\left[A \overset{\wedge}{,} A\right]\right) = I_{RG}.$$

Dónde estamos...

Introducción a la teoría de campos de Chern-Simons

Correspondencia de Witten mediante conexiones de Cartan

Teoría de Chern-Simons y extensión de conexiones

Conexiones de Cartan (Sharpe 1997)

- Sean (G,H) grupos de Lie con $H \subset G$ cerrado y G/H conexo.
- Una *geometría de Cartan* modelada sobre (G,H) es un fibrado H-principal $\pi : P \to M$ y una 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada A sobre P tal que

  (i) $A_u : T_u P \to \mathfrak{g}$ es un isomorfismo lineal para cada $u \in P$,
  (ii) $R_h^* A = \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ A$ para cada $h \in H$, y
  (iii) $A(\xi_P) = \xi$ para cada $\xi \in \mathfrak{h}$.

  A es la *conexión de Cartan* para dicha geometría de Cartan.
- Suponiendo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ para algún subespacio $\mathfrak{p}$, entonces A puede descomponerse como $A = \omega + e$.
- Supóngase además que existe $b : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathfrak{p} \perp \mathfrak{p}, \mathfrak{h} \perp \mathfrak{h}$. Entonces se puede definir
$$S_{CS}(A) := \int_M b\left(A \wedge F - \frac{1}{6} A \wedge [A \overset{\wedge}{,} A]\right).$$
- Para obtener la gravedad, considerar $G = SO(1,2) \oplus \mathbb{R}^3$ junto al isomorfismo $\phi : \mathfrak{so}(1,2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$, y definir
$$b(M+v, N+w) = \phi(M) \cdot w + \phi(N) \cdot v.$$

Conexiones de Cartan (Sharpe 1997)

- Sean (G,H) grupos de Lie con $H \subset G$ cerrado y G/H conexo.
- Una *geometría de Cartan* modelada sobre (G,H) es un fibrado H-principal $\pi : P \to M$ y una 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada A sobre P tal que

  (i) $A_u : T_uP \to \mathfrak{g}$ es un isomorfismo lineal para cada $u \in P$,
  (ii) $R_h^* A = \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ A$ para cada $h \in H$, y
  (iii) $A(\xi_P) = \xi$ para cada $\xi \in \mathfrak{h}$.

  A es la *conexión de Cartan* para dicha geometría de Cartan.
- Suponiendo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ para algún subespacio $\mathfrak{p}$, entonces A puede descomponerse como $A = \omega + e$.
- Supóngase además que existe $b : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathfrak{p} \perp \mathfrak{p}, \mathfrak{h} \perp \mathfrak{h}$. Entonces se puede definir

$$S_{CS}(A) := \int_M b\left(A \wedge F - \frac{1}{6} A \wedge [A \stackrel{\wedge}{,} A]\right).$$

- Para obtener la gravedad, considerar $G = SO(1,2) \oplus \mathbb{R}^3$ junto al isomorfismo $\phi : \mathfrak{so}(1,2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$, y definir

$$b(M+v, N+w) = \phi(M) \cdot w + \phi(N) \cdot v.$$

Conexiones de Cartan (Sharpe 1997)

- Sean (G,H) grupos de Lie con $H \subset G$ cerrado y G/H conexo.
- Una *geometría de Cartan* modelada sobre (G,H) es un fibrado H-principal $\pi : P \to M$ y una 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada A sobre P tal que

  (i) $A_u : T_u P \to \mathfrak{g}$ es un isomorfismo lineal para cada $u \in P$,
  (ii) $R_h^* A = \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ A$ para cada $h \in H$, y
  (iii) $A(\xi_P) = \xi$ para cada $\xi \in \mathfrak{h}$.

  A es la *conexión de Cartan* para dicha geometría de Cartan.
- Suponiendo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ para algún subespacio $\mathfrak{p}$, entonces A puede descomponerse como $A = \omega + e$.
- Supóngase además que existe $b : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathfrak{p} \perp \mathfrak{p}, \mathfrak{h} \perp \mathfrak{h}$. Entonces se puede definir

$$S_{CS}(A) := \int_M b\left(A \wedge F - \frac{1}{6} A \wedge [A \overset{\wedge}{,} A]\right).$$

- Para obtener la gravedad, considerar $G = SO(1,2) \oplus \mathbb{R}^3$ junto al isomorfismo $\phi : \mathfrak{so}(1,2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$, y definir

$$b(M+v, N+w) = \phi(M) \cdot w + \phi(N) \cdot v.$$

Conexiones de Cartan (Sharpe 1997)

- Sean (G,H) grupos de Lie con $H\subset G$ cerrado y G/H conexo.
- Una *geometría de Cartan* modelada sobre (G,H) es un fibrado H-principal $\pi: P\to M$ y una 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada A sobre P tal que
  (i) $A_u: T_uP\to\mathfrak{g}$ es un isomorfismo lineal para cada $u\in P$,
  (ii) $R_h^*A=\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\circ A$ para cada $h\in H$, y
  (iii) $A(\xi_P)=\xi$ para cada $\xi\in\mathfrak{h}$.

  A es la *conexión de Cartan* para dicha geometría de Cartan.
- Suponiendo que $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p}$ para algún subespacio $\mathfrak{p}$, entonces A puede descomponerse como $A=\omega+e$.
- Supóngase además que existe $b:\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ tal que $\mathfrak{p}\perp\mathfrak{p},\mathfrak{h}\perp\mathfrak{h}$. Entonces se puede definir
$$S_{CS}(A):=\int_M b\left(A\wedge F-\frac{1}{6}A\wedge[A\,\overset{\wedge}{,}\,A]\right).$$
- Para obtener la gravedad, considerar $G=SO(1,2)\oplus\mathbb{R}^3$ junto al isomorfismo $\phi:\mathfrak{so}(1,2)\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}^3$, y definir
$$b(M+v,N+w)=\phi(M)\cdot w+\phi(N)\cdot v.$$

Conexiones de Cartan (Sharpe 1997)

- Sean (G,H) grupos de Lie con $H \subset G$ cerrado y G/H conexo.
- Una *geometría de Cartan* modelada sobre (G,H) es un fibrado H-principal $\pi : P \to M$ y una 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada A sobre P tal que

  (i) $A_u : T_u P \to \mathfrak{g}$ es un isomorfismo lineal para cada $u \in P$,
  (ii) $R_h^* A = \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ A$ para cada $h \in H$, y
  (iii) $A(\xi_P) = \xi$ para cada $\xi \in \mathfrak{h}$.

  A es la *conexión de Cartan* para dicha geometría de Cartan.
- Suponiendo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ para algún subespacio $\mathfrak{p}$, entonces A puede descomponerse como $A = \omega + e$.
- Supóngase además que existe $b : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathfrak{p} \perp \mathfrak{p}, \mathfrak{h} \perp \mathfrak{h}$. Entonces se puede definir
$$S_{CS}(A) := \int_M b\left(A \wedge F - \frac{1}{6} A \wedge [A \overset{\wedge}{,} A]\right).$$
- Para obtener la gravedad, considerar $G = SO(1,2) \oplus \mathbb{R}^3$ junto al isomorfismo $\phi : \mathfrak{so}(1,2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$, y definir
$$b(M+v, N+w) = \phi(M) \cdot w + \phi(N) \cdot v.$$

Dónde estamos...

Problema variacional para gravedad con bases

- Fijemos $\eta = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1)$.
- η induce la descomposición

$$\mathfrak{gl}(m) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

  donde $A \in K \subset GL(m)$ sii $A^T \eta A = \eta$.
- $\tau : LM \to M$ fibrado de bases, M espacio-tiempo.
- Sobre $J^1\tau$ existen formas canónicas (Castrillón López and Muñoz Masqué 2001)

$$\omega \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathfrak{gl}(m)\right), \qquad \text{conexión canónica,}$$
$$\theta \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathbb{R}^m\right), \qquad \text{forma tautológica.}$$

- Forma de nometricidad $\omega_{\mathfrak{p}} := \pi_{\mathfrak{p}} \circ \omega$, Torsión canónica $T := d\theta + \omega \wedge \theta$.
- Lagrangiano de Palatini $\mathscr{L}_{PG} := \eta^{kl} \varepsilon_{kpi} \theta^i \wedge \Omega^p_l$ $(\dim M = 3)$.

Problema variacional para gravedad con bases

- Fijemos $\eta = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1)$.
- η induce la descomposición

$$\mathfrak{gl}(m) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

  donde $A \in K \subset GL(m)$ sii $A^T \eta A = \eta$.
- $\tau : LM \to M$ fibrado de bases, M espacio-tiempo.
- Sobre $J^1\tau$ existen formas canónicas (Castrillón López and Muñoz Masqué 2001)

$$\omega \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathfrak{gl}(m)\right), \qquad \text{conexión canónica,}$$
$$\theta \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathbb{R}^m\right), \qquad \text{forma tautológica.}$$

- Forma de nometricidad $\omega_\mathfrak{p} := \pi_\mathfrak{p} \circ \omega$, Torsión canónica $T := d\theta + \omega \wedge \theta$.
- Lagrangiano de Palatini $\mathscr{L}_{PG} := \eta^{kl} \varepsilon_{kpi} \theta^i \wedge \Omega^p_l$ $(\dim M = 3)$.

Problema variacional para gravedad con bases

- Fijemos $\eta = \operatorname{diag}(1, \cdots, 1, -1)$.
- η induce la descomposición

$$\mathfrak{gl}(m) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

  donde $A \in K \subset GL(m)$ sii $A^T \eta A = \eta$.
- $\tau : LM \to M$ fibrado de bases, M espacio-tiempo.
- Sobre $J^1\tau$ existen formas canónicas (Castrillón López and Muñoz Masqué 2001)

$$\omega \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathfrak{gl}(m)\right), \qquad \text{conexión canónica,}$$
$$\theta \in \Omega^1\left(J^1\tau, \mathbb{R}^m\right), \qquad \text{forma tautológica.}$$

- Forma de nometricidad $\omega_{\mathfrak{p}} := \pi_{\mathfrak{p}} \circ \omega$, Torsión canónica $T := d\theta + \omega \wedge \theta$.
- Lagrangiano de Palatini $\mathscr{L}_{PG} := \eta^{kl} \varepsilon_{kpi} \theta^i \wedge \Omega^p_l$ ($\dim M = 3$).

Relación entre los grupos de estructura

- Tenemos el siguiente diagrama de grupos

$$\begin{tikzcd} GL(m) \arrow[d, hook] & K \arrow[l, hook'] \arrow[d, hook] \\ GL(m) \oplus \mathbb{R}^m & K \oplus \mathbb{R}^m \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

- La formulación de la correspondencia en términos de conexiones de Cartan está asociada a esta inclusión.
- La gravedad con bases tiene este grupo de estructura.

Pregunta:

¿Existe una teoría de Chern-Simons sobre $GL(3) \oplus \mathbb{R}^3$ que conduzca a la gravedad con bases sobre $GL(3)$?

Relación entre los grupos de estructura

- Tenemos el siguiente diagrama de grupos

$$\begin{tikzcd} GL(m) \arrow[d, hook] & K \arrow[l, hook'] \arrow[d, hook] \\ GL(m) \oplus \mathbb{R}^m & K \oplus \mathbb{R}^m \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

- La formulación de la correspondencia en términos de conexiones de Cartan está asociada a esta inclusión.
- La gravedad con bases tiene este grupo de estructura.

Pregunta:

¿Existe una teoría de Chern-Simons sobre $GL(3) \oplus \mathbb{R}^3$ que conduzca a la gravedad con bases sobre $GL(3)$?

Relación entre los grupos de estructura

- Tenemos el siguiente diagrama de grupos

$$\begin{tikzcd} GL(m) \arrow[d, hook] & & K \arrow[ll, hook'] \arrow[d, hook] \\ GL(m)\oplus\mathbb{R}^m & & K\oplus\mathbb{R}^m \arrow[ll, hook'] \end{tikzcd}$$

- La formulación de la correspondencia en términos de conexiones de Cartan está asociada a esta inclusión.
- La gravedad con bases tiene este grupo de estructura.

Pregunta:

¿Existe una teoría de Chern-Simons sobre $GL(3)\oplus\mathbb{R}^3$ que conduzca a la gravedad con bases sobre $GL(3)$?

Relación entre los grupos de estructura

- Tenemos el siguiente diagrama de grupos

$$\begin{tikzcd} \color{blue}{GL(m)} \arrow[d, hook] & \color{red}{K} \arrow[l, hook'] \arrow[d, hook, red] \\ GL(m) \oplus \mathbb{R}^m & \color{red}{K \oplus \mathbb{R}^m} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

- La formulación de la correspondencia en términos de conexiones de Cartan está asociada a esta inclusión.
- La gravedad con bases tiene este grupo de estructura.

Pregunta:

¿Existe una teoría de Chern-Simons sobre $GL(3) \oplus \mathbb{R}^3$ que conduzca a la gravedad con bases sobre $GL(3)$?

Extensión de conexiones de Cartan

- Consideremos sobre el fibrado de bases afín la teoría de Chern-Simons definida como antes, pero usando

$$b : \mathfrak{a}(3) \times \mathfrak{a}(3) \to \mathbb{R} : (a, \xi; b, \zeta) \mapsto \eta^{jk} \varepsilon_{ikl} \left(\zeta^l a^i_j + \xi^l b^i_j \right).$$

Agregamos la condición

$$\pi_{\mathfrak{p}} \circ \omega = 0.$$

- Puede establecerse una correspondencia uno a uno entre las extremales de la teoría de Chern-Simons sobre $SO(2,1) \ltimes \mathbb{R}^3$ y la teoría de Chern-Simons sobre $GL(3) \ltimes \mathbb{R}^3$.
- Esta correspondencia utiliza el siguiente resultado: Dado el diagrama de grupos

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[d, hook] & H \arrow[l, hook'] \arrow[d, hook] \\ G & H_2 \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

toda conexión de Cartan para (H, H_1) puede extenderse a una conexión de Cartan para el par (H_2, G). Inversamente, bajo ciertas condiciones toda conexión de Cartan asociada al par (G, H_2) se reduce a una conexión de Cartan para (H, H_1).

Extensión de conexiones de Cartan

- Consideremos sobre el fibrado de bases afín la teoría de Chern-Simons definida como antes, pero usando

$$b : \mathfrak{a}(3) \times \mathfrak{a}(3) \to \mathbb{R} : (a,\xi;b,\zeta) \mapsto \eta^{jk}\varepsilon_{ikl}\left(\zeta^l a^i_j + \xi^l b^i_j\right).$$

  Agregamos la condición

$$\pi_{\mathfrak{p}} \circ \omega = 0.$$

- Puede establecerse una correspondencia uno a uno entre las extremales de la teoría de Chern-Simons sobre $SO(2,1) \ltimes \mathbb{R}^3$ y la teoría de Chern-Simons sobre $GL(3) \ltimes \mathbb{R}^3$.
- Esta correspondencia utiliza el siguiente resultado: Dado el diagrama de grupos

$$\begin{tikzcd} H_1 & H \arrow[l, hook'] \arrow[d, hook] \\ G \arrow[from=u, hook] & H_2 \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

  toda conexión de Cartan para (H, H_1) puede extenderse a una conexión de Cartan para el par (H_2, G). Inversamente, bajo ciertas condiciones toda conexión de Cartan asociada al par (G, H_2) se reduce a una conexión de Cartan para (H, H_1).

Extensión de conexiones de Cartan

- Consideremos sobre el fibrado de bases afín la teoría de Chern-Simons definida como antes, pero usando

$$b : \mathfrak{a}(3) \times \mathfrak{a}(3) \to \mathbb{R} : (a, \xi; b, \zeta) \mapsto \eta^{jk} \varepsilon_{ikl} \left(\zeta^l a^i_j + \xi^l b^i_j \right).$$

  Agregamos la condición

$$\pi_{\mathfrak{p}} \circ \omega = 0.$$

- Puede establecerse una correspondencia uno a uno entre las extremales de la teoría de Chern-Simons sobre $SO(2,1) \ltimes \mathbb{R}^3$ y la teoría de Chern-Simons sobre $GL(3) \ltimes \mathbb{R}^3$.
- Esta correspondencia utiliza el siguiente resultado: Dado el diagrama de grupos

$$\begin{tikzcd} H_1 & H \arrow[l, hook'] \arrow[d, hook] \\ G \arrow[from=u, hook] & H_2 \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

  toda conexión de Cartan para (H, H_1) puede extenderse a una conexión de Cartan para el par (H_2, G). Inversamente, bajo ciertas condiciones toda conexión de Cartan asociada al par (G, H_2) se reduce a una conexión de Cartan para (H, H_1).

Bibliografía I

D. V. Alekseevsky and P. W. Michor. "Differential geometry of Cartan connections". In: *Publ. Math. Debrecen* 47 (1995), pp. 349–375.

M. Castrillón López and J. Muñoz Masqué. "The geometry of the bundle of connections". In: *Mathematische Zeitschrift* 236 (4 2001), pp. 797–811.

Daniel S. Freed. "Classical Chern-Simons theory. Part 1". In: *Adv. Math.* 113 (1995), pp. 237–303.

R.W. Sharpe. *Differential geometry: Cartan's generalization of Klein's Erlangen program*. Graduate texts in mathematics. Springer, 1997.

Carlos Tejero Prieto. "Variational formulation of Chern–Simons theory for arbitrary Lie groups". In: *Journal of Geometry and Physics* 50.1-4 (Apr. 2004), pp. 138–161.

Bibliografía II

Derek K Wise. “MacDowell–Mansouri gravity and Cartan geometry”. In: *Classical and Quantum Gravity* 27.15 (2010), p. 155010.

Edward Witten. “$2+1$-dimensional gravity as an exactly soluble system”. In: *Nuclear Phys. B* 311.1 (1988), pp. 46–78.